УДК 517.977.8

ДИНАМИЧЕСКАЯ ИГРА НА ФОНДОВЫХ БИРЖАХ

А. Н. КРАСОВСКИЙ,
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой,
А. М. ТАРАСЬЕВ,
доктор физико-математических наук, профессор,
Н. А. КРАСОВСКИЙ,
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель,
Уральский государственный аграрный университет
(620075, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, д. 42; тел.: 8 (343) 221-40-29)

Ключевые слова: *динамическая игра, стратегии игроков, фондовые биржи, «быки» и «медведи», равновесие по Нэшу.*

Рассматриваются динамические игры, моделирующие ситуации, возникающие в экономических процессах и взаимодействиях фондовых бирж. Для построения эволюционной игры обсуждается понятие динамического равновесия по Нэшу. В основе динамического равновесия лежат решения дифференциальных игр с нулевой суммой. Равновесная траектория игры строится на основе гарантирующих стратегий, которые максимизируют собственные функционалы выигрыша. При этом стратегии, которые минимизируют функционалы выигрыша противника, служат в конструкции динамического равновесия по Нэшу как стратегии наказания. Рассматриваются вспомогательные дифференциальные игры с параметрическим терминальным функционалом платы. Предложены алгоритмы построения равновесных траекторий в рассматриваемых играх, которые сдвигают решения от классических равновесий по Нэшу к решениям с лучшими значениями функционалов. Установлено, что предлагаемые равновесные решения обладают лучшими свойствами по значению функционалов, чем классические решения эволюционных игр. Эффективность алгоритмов продемонстрирована приложениями для моделей инвестиций в ценные бумаги и моделей производственных инвестиций. Рассматривается модель, в которой анализируется ситуация с одним статическим равновесием по Нэшу. Характерной конструкцией такой ситуации является игра на финансовых рынках акций и облигаций. За основу поведения игроков взято поведение торговцев, которые играют на повышение курса и называются «быками», и торговцев, которые играют на понижение курса и называются «медведями». Параметры матриц в этой игре означают доходность акций и облигаций, выраженную в виде процентных ставок. Показано, что равновесные траектории в этой модели сходятся к точке пересечения линий переключения гарантирующих стратегий. Эта точка пересечения существенно отличается от точки статического равновесия по Нэшу, и значение обоих функционалов выигрыша в этой точке пересечения лучше, чем в точке статического равновесия по Нэшу. С использованием численных методов проводятся компьютерное моделирование и симуляция рассматриваемых игровых процессов при различных параметрах систем.

THE DYNAMIC GAME ON STOCK EXCHANGES

A. N. KRASOVSKII,
doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of department,
A. M. TARASYEV,
doctor of physical and mathematical sciences, professor,
N. A. KRASOVSKII,
candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer, Ural State Agrarian University
(42 K. Liebknechta Str., 620075, Ekaterinburg; tel.: +7 (343) 221-40-29)

Keywords: *dynamic game, players strategies, stock exchanges,"bulls" and "bears", Nash equilibrium.*

Dynamic games that simulate situations arising in the economic processes and interactions stock exchanges is considered. To construct evolutionary game discusses the concept of a dynamic Nash equilibrium. At the heart of the dynamic equilibrium solutions of differential games are zero-sum. The equilibrium trajectory of the game is based on the guarantee of strategies that maximize own win functional. At the same strategies that minimize the functional scoring opponent, serve in the design of dynamic Nash equilibrium as a strategy of punishment. We consider the auxiliary differential game with a terminal payoff functional parametric. An algorithm for constructing the equilibrium trajectories in these games, which are shifted from the classical solution of Nash equilibrium for solutions with the best values of the functional is proposed. It was found that the proposed equilibrium solutions have better functional properties by value than the classic solutions of evolutionary games. The effectiveness of the algorithms is demonstrated by applications to models of investments in securities and models of productive investment. The model, which analyzes the situation with a static Nash equilibrium, is considered. A characteristic design such a situation is to play in the financial markets of stocks and bonds. The basis of the behavior of the players taken the behavior of traders who play on the appreciation and are called “bulls”, and traders who bearish on the course and are called “bears”. Options matrices in this game mean yield of stocks and bonds, expressed in the form of interest rates. It is shown that the equilibrium trajectory in this model converge to the point of intersection of the lines ensure switching strategies. This point of intersection is significantly different from a static point of Nash equilibrium, and the importance of winning both functional at this point of intersection is better than at a static Nash equilibrium. The computer modeling and simulation of considered processes with different parameters is conducted with the use of numerical methods.

Положительная рецензия представлена А. Ф. Шориковым, доктором физико-математических наук, профессором кафедры прикладной математики Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина.

В работе исследуются модели эволюционных игр с ненулевой суммой. Рассматриваются игровые взаимодействия между двумя группами участников в рамках теории дифференциальных игр [4]. При определении равновесных по Нэшу решений используются идеи и подходы неантагонистических дифференциальных игр [1]. Основное внимание в исследовании эволюционных игр уделяется построению динамического равновесия по Нэшу с гарантирующими стратегиями игроков, которые максимизируют соответствующие функции выигрыша [2]. Основным результатом является построение разрешающих траекторий, которые дают результат, лучший по сравнению с классическими моделями, например моделями с репликаторной динамикой.

Рассматривается модель, анализирующая ситуацию с одним статическим равновесием по Нэшу. Характерной конструкцией такой ситуации выступает игра на финансовых рынках акций и облигаций. За основу поведения игроков взято поведение торговцев, которые играют на повышение курса и называются «быками», и торговцев, которые играют на понижение курса и называются «медведями».

Система дифференциальных уравнений, которая описывает динамику поведения двух групп (коалиций), имеет вид [3]: $\dot{x} = -x + u$

$$\dot{y} = -y + v.$$

Здесь параметры $x, 0 \le x \le 1$, и $y, 0 \le y \le 1$ определяют вероятности того, как выбранные игроки придерживаются своих выбранных стратегий. Управляющие параметры u и v удовлетворяют условиям $0 \le u \le 1, 0 \le v \le 1$ и являются сигналами, рекомендующими смену стратегий игроками. Например, значение $u = 0\ (v = 0)$ соответствует сигналу: «сменить первую стратегию на вторую». Значение $u = 1\ (v = 1)$ соответствует сигналу: «сменить вторую стратегию на первую». Значение $u = x\ (v = y)$ соответствует сигналу: «сохранять предыдущую стратегию».

Терминальные функции выигрыша коалиций определяются как математическое ожидание выигрышей, задаваемых соответствующими матицами *A* и *B* в биматричной игре, и могут быть интерпретированы как «локальные» интересы коалиций в заданный момент *T*.

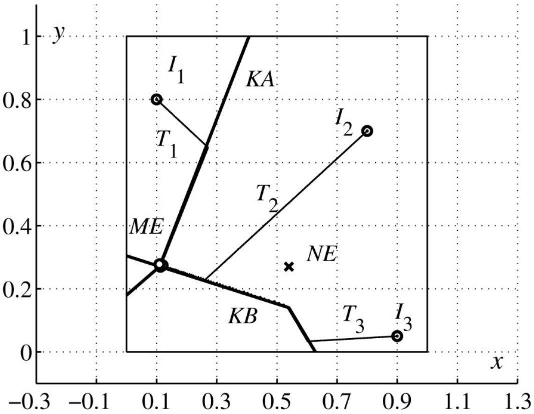

Рис. 1. Равновесные траектории в случае единственного статического равновесия по Нэшу

Рассмотрим для примера матрицы выигрышей двух игроков на финансовом рынке, которые отражают данные по исследованным рынкам акций (см.: www.money.cnn.com) и облигаций (см.: www.fxstreet.ru.com/charts/bondyield) в США. Матрица *A* отвечает поведению «быков». Матрица *B* соответствует поведению «медведей». Параметры матриц в этой игре означают доходность акций и облигаций, выраженную в виде процентных ставок:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 1.75 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 10 & 0.5 \end{pmatrix}.$$

Равновесные траектории в этой модели сходятся к точке пересечения линий переключения гарантирующих стратегий (рис. 1).

На рис. 1 показаны ситуация равновесия по Нэшу *NE*, линии переключения *KA* и *KB*, точка рыночного равновесия в их пересечении *ME*, начальные точки I_1, I_2, I_3 и траектории алгоритма T_1, T_2, T_3, сходящиеся к рыночному равновесию. Видно, что новая точка равновесия *ME* существенно отличается от точки статического равновесия по Нэшу *NE*, и значение обоих функционалов выигрыша в новой точке лучше, чем в старой.

Исследования, приведенные в работе, поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 14-01-00065) и Российским научным фондом (грант № 15-11-10018 «Развитие теории и методов решения задач динамической оптимизации»).

Литература

1. Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург : Наука, 1993. 185 с.
2. Красовский Н. А., Кряжимский А. В., Тарасьев А. М. Уравнения Гамильтона-Якоби в эволюционных играх // Тр. ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 114–131.
3. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О дифференциально-эволюционных играх // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.
4. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control Under Lack of Information. Boston : Birkhauser, 1994. 319 p.

References

1. Kleymenov A. F. Nonantagonistic positional differential games. Ekaterinburg : Nauka, 1993. 185 p.
2. Krasovskii N. A., Kryazhimskii A. V., Tarasyev A. M. Hamilton-Jacobi equations in evolutionary games // Proceedings of IMM Ural Branch of RAS. 2014. Vol. 20. № 3. P. 114–131.
3. Kryazhimskii A. V., Osipov Y. S. On a differential-evolutionary games // Proceedings of Math. Institute of RAS. 1995. Vol. 211. P. 257–287.
4. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control Under Lack of Information. Boston : Birkhauser, 1994. 319 p.