УДК 517.977.8

# РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ В ДИНАМИЧЕСКОЙ ИГРЕ АУКЦИОННОГО ТИПА

**А. Н. КРАСОВСКИЙ,**
**доктор физико-математических наук, профессор,**
**заведующий кафедрой, Уральский государственный аграрный университет,**
**А. М. ТАРАСЬЕВ,**
**доктор физико-математических наук, профессор,**
**Уральский государственный аграрный университет,**
**заведующий сектором, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН,**
**Н. А. КРАСОВСКИЙ,**
**кандидат физико-математических наук,**
**старший преподаватель, Уральский государственный аграрный университет**
(620075, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, д. 42; тел.: 8 (343) 221-40-29)

***Ключевые слова:*** *динамическая некооперативная игра, равновесие по Нэшу, максимум Парето, рыночное равновесие, алгоритмы поиска равновесия.*

В работе рассматривается некооперативная игра нескольких участников, в которой игроки (правительства соседних стран) осуществляют торговлю квотами по снижению эмиссий парниковых газов. Вводится определение рыночного равновесия, комбинирующего свойства равновесий Нэша и Парето. Доказывается теорема существования рыночного равновесия. Предлагается алгоритм поиска рыночного равновесия, который сдвигает конкурентное равновесие по Нэшу к кооперативному максимуму Парето. Алгоритм интерпретирован в форме повторяющегося аукциона, в котором аукционер не имеет информации о функциях затрат и функциях экологического эффекта от снижения выбросов для стран-участников. Участники аукциона не имеют сведений о функциях затрат и функциях экологического эффекта других стран-участников. В каждом раунде аукциона участникам предлагаются индивидуальные ставки по снижению выбросов. Участники по предлагаемым ставкам производят максимизацию своих функций полезности и передают аукционеру свои наилучшие ответы – оптимальное снижение эмиссий в текущем периоде. В такой постановке предлагается стратегия аукционера, которая позволяет достичь рыночного равновесия. Рассматриваемый повторяющийся аукцион описывает процесс обучения в повторяющейся некооперативной игре при дефиците информации. Разработанный алгоритм реализован в программном комплексе, созданном в среде MATLAB. Предлагаемая разработка ориентирована на построение равновесных сбалансированных траекторий развития экономики, в которых конструируются оптимальные пропорции между инвестициями в экономику, новые технологии и защиту окружающей среды. Для компьютерного эксперимента рассматривалась игровая ситуация между странами Европейского союза и Россией. В рамках сотрудничества с Международным институтом прикладного системного анализа (IIASA, Австрия) были получены реальные данные о функциях затрат и функциях экологического эффекта и на основе этого калиброваны их параметры.

# EQUILIBRIUM SOLUTIONS IN THE DYNAMIC AUCTION-TYPE GAME

**A. N. KRASOVSKII,**
**doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of department,**
**Ural State Agrarian University,**
**A. M. TARASYEV,**
**doctor of physical and mathematical sciences, professor, Ural State Agrarian University,**
**head of sector, Institute of Mathematics and Mechanics of N. N. Krasovskii UrB of RAS,**
**N. A. KRASOVSKII,**
**candidate of physical and mathematical sciences, senior lecturer, Ural State Agrarian University**
(42 K. Liebknechta Str., 620075, Ekaterinburg; tel.: +7 (343) 221-40-29)

***Keywords:*** *dynamic non-cooperative game, Nash equilibrium, Pareto maximum, market equilibrium, equilibrium search algorithms.*

This study deals with a multi-person non-cooperative game. Players of the game (governments of neighboring countries) are trading the greenhouse gas emission reduction quotas. We introduce definition of market equilibrium that combines properties of Nash and Pareto equilibria. Existence theorem for market equilibrium is proven. We propose an algorithm for searching the market equilibrium by shifting competitive Nash equilibrium to cooperative Pareto maximum. The algorithm is interpreted as a repeated auction. An auctioneer does not have information on participants' cost functions and functions of ecological effects of emission reduction. Each participating country has information on its own functions, but information on the functions of other participants is not available. In each round of the auction participants are individually offered the emission reduction rates. Given the rates participants maximize their utility functions and inform the auctioneer on their best replies – optimal emission reductions in the current period. In this setting, we consider a strategy of auctioneer that leads to the market equilibrium. The proposed repeated auction designs a learning process in repeated non-cooperative game under lack of information. Elaborated algorithm is realized in the MATLAB environment. The designed software allows constructing equilibrium trajectories of economic development, including optimal shares of investments in capital, new technologies and environmental protection. A model of a game between European Union and Russia was simulated. Parameters of model functions were calibrated on the data obtained in the framework of collaboration with International Institute for Applied Systems Analysis (IIASA, Austria).

*Положительная рецензия представлена А. Ф. Шориковым, доктором физико-математических наук, профессором кафедры прикладной математики УралЭНИН Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина.*

В работе представлена комбинация математической модели некооперативных игр и экономической модели «торговли» [2–4] между соседними странами, при которой «товаром» являются снижения эмиссий парниковых газов соседних стран. Основная идея заключается в том, что страна $i$ желает снизить эмиссии на своей территории лишь в случае, если в обмен на это она получает достаточное снижение загрязнений, «импортированных» из соседних стран, $i=1,...,n$. Каждая страна стремится максимизировать свою функцию полезности, в которой затраты на снижение эмиссий сбалансированы с пользой от экологического эффекта.

Проблема, которую предстоит решить аналитически, состоит в том, существует ли состояние равновесия при таком многостороннем обмене снижения эмиссий. Назовем такое состояние «рыночным равновесием». При существовании подобного равновесия следующий вопрос состоит в том, при каких условиях такое решение оптимально согласно максимуму Парето [1].

Алгоритмы сформулированы в виде элементов аукциона. Аукционер предлагает конкретные для каждой страны цены или обменные курсы, которые определяют количественное снижение эмиссий на собственную территорию, которое страна $i$ получит за счет снижения собственных эмиссий на одну единицу. Страны-участники отвечают одновременно, указывая снижение эмиссий, которые они желают произвести за предлагаемую цену. В процессе аукционер имеет информацию о коэффициентах перемещения эмиссий между странами-участниками. Он использует их, чтобы перевести снижение эмиссий, предложенных странами, в итоговую загрузку загрязнениями конкретной страны. Аукционер не имеет точной информации о функциях полезности стран-участников. У него могут быть лишь грубые оценки темпов их роста. Аукционер учитывает предложенные странами-участниками снижения эмиссий и текущее загрязнение и сравнивает их с требуемыми. В случае большого отклонения между «предложением» и «спросом» он предлагает новые цены. Со своей стороны участники отвечают снижением эмиссий, опираясь лишь на свои функции полезности. С математической точки зрения аукцион можно интерпретировать как декомпозиционный алгоритм поиска равновесия [5].

Предложенная торговля снижением эмиссий с точки зрения теории игр может рассматриваться как некооперативная игра между странами. Ситуация рыночного равновесия рассматривается как одна из приемлемых в игре и представляет из себя комбинацию классических понятий равновесия по Нэшу и Парето.

*Ситуации равновесия.* Мы имеем дело с моделью торговли снижением эмиссий. В модели задействовано $n$ стран и аукционер. Каждая страна $i$ контролирует собственную величину снижения эмиссий, $x_i \ge 0$. Страна $i$ заинтересована в максимизации собственной функции полезности $w_i$, заданной формулой:

$$w_i(x) = -C_i(x_i) + B_i\left(\sum_{i=1}^{n} a_j\, x_j\right). \qquad (1)$$

Здесь $x=(x_1,...,x_n)$ – полный вектор снижения эмиссий, $C_i(x_i)$ – функция затрат страны $i$ на снижение эмиссий, $x_i$, $B_i\left(\sum_{i=1}^{n} a_j\, x_j\right)$ – функция экологического эффекта, который получает страна $i$ благодаря общему снижению загрязнения на ее территории, $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_j$ и $a_{ji}$ – транспортный коэффициент, т. е. часть промышленных выбросов страны $j$, перенесенных на территорию страны $i$. Предполагается, что $a_{ji} > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} a_{ji} x_j \le 1$. Каждая функция затрат $C_i$ выпукла и монотонно возрастает. Каждая функция экологического эффекта $B_i$ строго вогнута и монотонно возрастает, а также имеется уровень насыщения $\overline{y_i}$, который остается постоянным на интервале $\left[\overline{y_i},\infty\right)$. Считается, что функции $C_i$ и $B_i$ дважды дифференцируемы, что подразумевает:

$$C_i'(x_i) > 0,\ C_i''(x_i) \ge 0\ \ (x_i \ge 0), \qquad (2)$$

$$\begin{gathered} B_i'(y_i) > 0,\ B_i''(y_i) < 0\ \ \left(0 \le y_i \le \overline{y_i}\right), \\ B_i'(y_i) = 0\ \ \left(y_i \ge \overline{y_i}\right). \end{gathered} \qquad (3)$$

Мы видим процесс нахождения вектора снижения эмиссий $x$ как некооперативную игру между странами с участием $n$ игроков. Допустимые стратегии страны $i$ – снижение эмиссий $x_i \ge 0$, а функция полезности $w_i$. Мы предполагаем, что при торговле снижениями эмиссий (на международных переговорах), что эквивалентно поиску решения игры, делегат от страны $i$ полностью информирован о транспортной матрице:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ & & ... & \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а также о функции полезности страны, которую он представляет ($w_i$). При этом он практически не имеет информации о функциях полезности других стран [6]. Участники начинают игру с начальным вектором снижения эмиссий $x^0 = 0$. Вектор снижения эмиссий $x=(x_1,...,x_n)$ положителен, если $x_1,...,x_n$ положительны.

Будем считать, что рыночное равновесие является желаемым решением игры. Назовем рыночным равновесием вектор положительного снижения эмиссий $x^M = \left(x_1^M,...,x_n^M\right)$, если для каждой страны $i$ функция $w_i\left(x^M\right)$ $(\lambda > 0)$ достигает максимума при $\lambda = 1$,

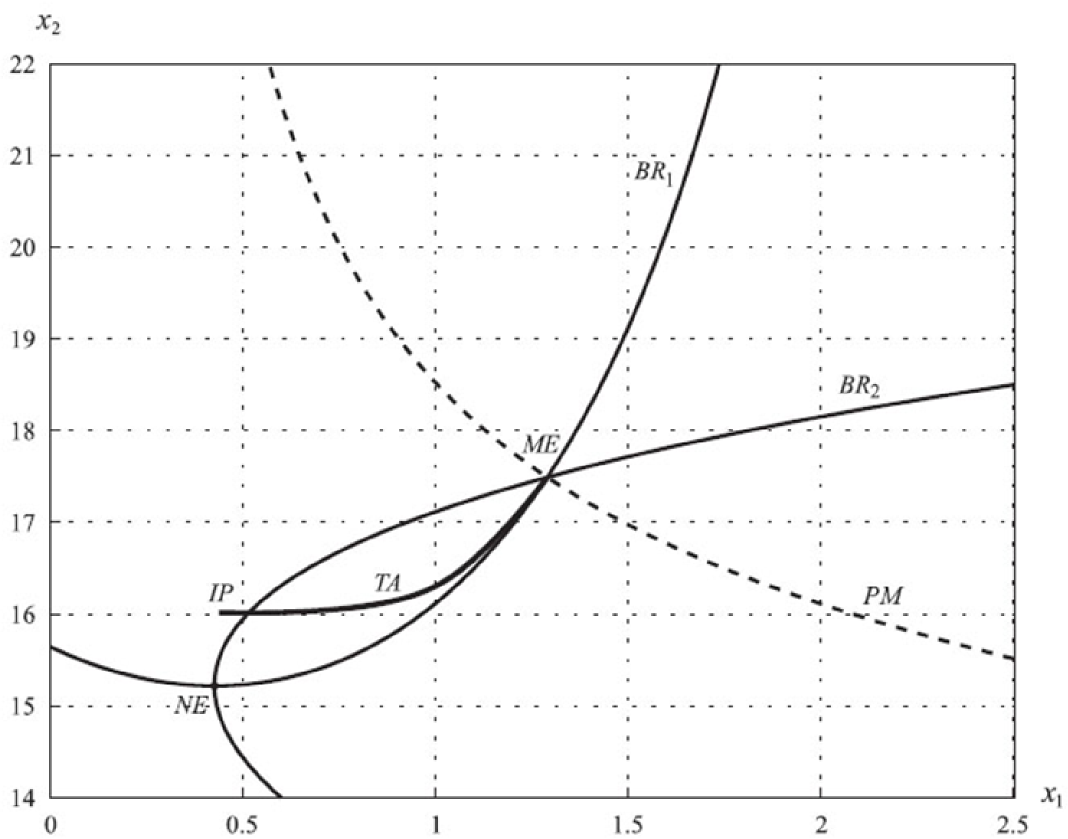


*Рис. 1. Поиск рыночного равновесия*

$$x_i^M = argmax\{w_i(\lambda x^M):\lambda > 0\},$$

что эквивалентно

$$\frac{dw_i(\lambda x^M)}{d\lambda}|_{\lambda=1} = 0 \ (i = 1,...,n). \qquad (4)$$

Отношение (4) показывает, что $x^M$ является решением уравнений:

$$\langle \nabla w_i(x), x\rangle = 0 \ \ (i = 1,...,n), \qquad (5)$$

где $\langle ...\rangle$ означает скалярный продукт $n$-мерного векторного пространства.

Учитывая определение $w_i$, (1), уравнение (5) можно представить в виде:

$$-x_i C_i'(x_i) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) B_i'\left(\sum_{j=1}^{n} a_j x_j\right) = 0 \qquad (6)$$
$$(i = 1,...,n).$$

Уравнение (6) описывает множество $n$ кривых. Они показывают, какое снижение эмиссий $x_i$ желает осуществить страна $i$ взамен на ответное снижение $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j$, которое она получает благодаря снижению эмиссий всеми другими странами.

Коэффициент

$$p_i = p_i(x) = \frac{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j}{x_i} \qquad (7)$$

определяет обменный курс (для вектора снижения эмиссий $x$). Он показывает количественное снижение эмиссий на собственную территорию, которое страна $i$ получит за счет снижения собственных эмиссий на одну единицу. Используя обменный курс, представим (6) как:

$$-C_i'(x_i) + p_i B_i'(p_i x_i) = 0. \qquad (8)$$

Таким образом, перейдем к следующей характеристике рыночного равновесия: вектор положительных снижений эмиссий $x$ называется рыночным равновесием тогда и только тогда, когда он является решением системы алгебраических уравнений (8), в которой $p_i$ задано формулой (7).

Основной задачей исследований является разработка алгоритмов построения ситуаций рыночных равновесий (4)–(8).

*Компьютерное моделирование.* Алгоритм реализован в программе, написанной в среде MATLAB. Для компьютерного эксперимента рассматривается игровая ситуация между странами Европейского союза (*EU*) и Россией (*RU*). Идентифицируются функции затрат ($C_{EU}$, $C_{RU}$) и функции экологического эффекта ($B_{EU}$, $B_{RU}$), и эконометрически калибруются их коэффициенты.

Пользуясь формулой (1), представим полученные функции полезности для этих стран ($w_{EU}$, $w_{RU}$) в виде:

$$w_{EU}\left(x_1,x_2\right)=-\frac{e_1}{2}x_1^2-c_1+d_1\ln(a_{11}x_1+a_{21}x_2),$$

$$w_{RU}\left(x_1,x_2\right)=-\frac{e_2}{2}x_2^2-c_2+d_2\ln(a_{12}x_1+a_{22}x_2).$$

Для рассматриваемой модели на основе реальных данных построены ситуации равновесия по Нэшу, множество точек максимума по Парето, кривые наилучших ответов игроков, ситуация рыночного равновесия и траектория рыночного аукциона.

Полученные результаты представлены на рис. 1. Здесь показаны ситуация равновесия по Нэшу (*NE*), множество точек максимума по Парето (*PM*), линии реакции конкурентов (*BR1*) и (*BR2*), точка рыночного равновесия в их пересечении (*ME*), начальная точка (*IP*) и траектория алгоритма (*TA*), сходящаяся к рыночному равновесию.

В заключение отметим, что разработанная программа может быть использована для оценки оптимального экономического развития регионов при сохранении качественного уровня окружающей среды и востребована агентствами, занимающимися этой проблематикой.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 14-01-00065 и 14-01-00486а), программы Президиума РАН «Математические задачи современной теории управления», проектов УрО РАН (15-16-1-13, 15-7-1-22) и Международного института прикладного системного анализа (IIASA, проект NSFC-IIASA «Оптимизация продуктивности природных ресурсов»).*

**Литература**

1. Клейменов А. Ф. Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург : Наука, 1993. 185 с.
2. Красовский А. Н., Ладейщиков А. Н. Некоторые задачи игрового управления. Екатеринбург : УрГСХА, 2012. 114 с.
3. Красовский А. Н., Ладейщиков А. Н., Чой Е. С. Некоторые задачи оптимального управления при дефиците информации. Екатеринбург : УрГАУ, 2014. 112 с.
4. Красовский А. Н., Тарасьев А. М., Красовский Н. А. Динамическая игра на фондовых биржах // Аграрный вестник Урала. 2015. № 8. С. 86–87.
5. Красовский Н. А., Кряжимский А. В., Тарасьев А. М. Уравнения Гамильтона – Якоби в эволюционных играх // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2014. Т. 20. № 3. С. 114–131.
6. Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Поиск точек максимума векторного критерия с декомпозиционными свойствами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2009. Т. 15. № 4. С. 167–182.
7. Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Декомпозиционный алгоритм поиска равновесия в динамической игре // Математическая теория игр и ее приложения. 2011. Т. 3. № 4. С. 49–88.
8. Красовский Н. А., Тарасьев А. М. Равновесные решения в динамических играх. Екатеринбург : УрГАУ, 2015. 128 с.
9. Кряжимский А. В., Осипов Ю. С. О дифференциально-эволюционных играх // Тр. Мат. ин-та РАН. 1995. Т. 211. С. 257–287.
10. Красовский А. Н., Красовский Н. Н. Управление при дефиците информации. Бостон : Биркхаузер, США. 1994. 319 с.

**References**

1. Kleymenov A. F. Non-antagonistic positional differential games. Ekaterinburg : Nauka, 1993. 185 p.
2. Krasovskii A. N., Ladeyschikov A. N. Some problems of game control. Ekaterinburg : UrSAA, 2012. 114 p.
3. Krasovskii A. N., Ladeyschikov A. N., Choi Y. S. Some problems of optimal control under lack of information. Ekaterinburg : UrSAU, 2014. 112 p.
4. Krasovskii A. N., Tarasyev A. M., Krasovskii N. A. The dynamic game on stock exchanges // Agrarian Bulletin of the Urals. 2015. № 8. P. 86–87.
5. Krasovskii N. A., Kryazhimskiy A. V., Tarasyev A. M. Hamilton – Jacobi equations in evolutionary games // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS. 2014. Vol. 20. № 3. P. 114–131.
6. Krasovskii N. A., Tarasyev A. M. Search of maximum points for vector criterion with decomposition properties // Proceedings of Institute of Mathematics and Mechanics of UrB RAS. 2009. Vol. 15. № 4. P. 167–182.
7. Krasovskii N. A., Tarasyev A. M. Decomposition algorithm of searching equilibria in a dynamic game // Mathematical game theory and application. 2011. Vol. 3. № 4. P. 49–88.
8. Krasovskii N. A., Tarasyev A. M. Equilibrium solutions in dynamic games. Ekaterinburg : UrSAU, 2015. 128 p.
9. Kryazhimskii A. V., Osipov Y. S. On differential-evolutionary games // Proceedings of Math. Institute of RAS. 1995. Vol. 211. P. 257–287.
10. Krasovskii A. N., Krasovskii N. N. Control under lack of information. Boston : Birkhauser, 1994. 319 p.