

## О МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЯЕМОГО ДВИЖЕНИЯ ДРОНА-КВАДРОКОПТЕРА

А. Н. КРАСОВСКИЙ,  
доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой,  
О. А. СУСЛОВА,  
аспирант, заведующая лабораторией,  
Уральский государственный аграрный университет  
(620075, г. Екатеринбург, ул. К. Либкнехта, д. 42; тел: 8 (343) 221-40-29)

**Ключевые слова:** дрон, квадрокоптер, математическая модель, управляющее воздействие, критерий качества.

Рассматривается упрощенная математическая модель движения дрона-квадрокоптера под действием некоторых выбранных управляющих воздействий. При этом в качестве таких воздействий выбираются угловые скорости вращения винтов. Каждый из четырех винтов снабжен своим электродвигателем, и, следовательно, скорости вращения всех винтов могут быть различными. Рассмотрены случаи выбора управлений, обеспечивающих вертикальный взлет или посадку, случаи вращения квадрокоптера в горизонтальной плоскости на некоторой фиксированной высоте, а также полет дрона в каком-либо направлении в горизонтальной плоскости. Предлагается и обосновывается некоторая новая модификация математической модели полета в форме дифференциальных уравнений Ньютона – Эйлера. Рассматривается оптимизация движения полета по критерию качества процесса управления, определяющего затраты энергии на выработку управляющих воздействий на заданном зафиксированном отрезке времени. При этом за данный отрезок времени дрон совершает перелет из заданного начального в заданное конечное положение в трехмерном евклидовом пространстве. Математически рассматриваемый критерий качества есть интеграл от квадрата четырехмерного вектора управляющего воздействия, что традиционно для двигателей малой тяги, применяемых, в частности, в авиационной и ракетной технике. Решается задача программного управления, при котором оптимальное управляющее воздействие получается в виде некоторой функции времени на заданном отрезке полета квадрокоптера. Отрезок времени управления движением квадрокоптера определяется ресурсом его аккумулятора. Приводится иллюстрирующий пример облета дроном сельскохозяйственного уголья. При этом в качестве дрона рассматривается легкий квадрокоптер, снабженный аккумуляторной батареей, микропроцессором и двумя видеокамерами для горизонтальной и вертикальной съемок.

## ON A MATHEMATICAL MODEL OF THE CONTROLLED MOTION OF A DRONE-QUADROCOPTER

A. N. KRASOVSKII,  
doctor of physical and mathematical sciences, professor, head of chair,  
O. A. SUSLOVA,  
graduate student, head of laboratory,  
Ural State Agrarian University  
(42 K. Liebknecht Str., 620075, Ekaterinburg; tel.: +7 (343) 221-40-29)

**Keywords:** drone, quadcopter, mathematical model, control action, quality index.

A simplified mathematical model of a drone-quadrocopter motion under some controlled actions is considered. As these actions angular velocities of helix blades rotation are chosen. Each of four helix blades has own electric motor and, consequently, rotation velocities can be different. Cases of control choose, that provide vertical takeoff and landing, cases of quadrocopter rotation in horizontal plane on some fixed height and case of drone flight in some direction in horizontal plane are considered. Some new modification of a mathematical model of the flight in the form of Newton – Euler differential equations is proposed and proved. An optimization of the flight motion with the quality index of control process, that determines the energy consumption for the production of control actions in a given fixed time interval is considered. In this time interval the drone makes a flight from the given initial to the given terminal position in the three-dimensional Euclidian space. Mathematically the considered quality index is the integral of the four-vector square, what is usual for low traction engines, used in aircrafts and rockets. The program control problem, in which optimal control action is obtained as some time function on a given quadrocopter flight section, is solved. The time interval of the quadrocopter motion control is determined by its battery resource. The illustrated example of the agricultural lands overflight is given. As a drone, light quadrocopter with rechargeable battery, microprocessor and two horizontal and vertical video-cameras is considered.

Положительная рецензия представлена В. В. Стружановым,  
доктором физико-математических наук, главным научным сотрудником  
Института машиноведения Уральского отделения Российской академии наук.



В работе исследуется новая математическая модель управляемого движения дроном-квадрокоптером. Как известно, под математической моделью того или иного процесса, не важно какого – механического, биологического или медицинского, понимается описание динамики этого процесса с помощью дифференциальных уравнений [4]. При этом обычно процесс рассматривается на некотором фиксированном отрезке времени, т. е. предполагается начальный момент времени (момент старта) и момент окончания процесса управления, заданный и зафиксированный. Особую роль при составлении математической модели играет выбор управляющих воздействий, или просто управлений, т. е. параметров системы, подвластной нашему влиянию, существенно воздействующих на динамику процесса (движение управляемого объекта).

В данной работе предлагается некоторая новая математическая модель для движения конкретного механического объекта, совершающего движение в трехмерном пространстве. В качестве этого объекта выбран дрон-квадрокоптер, способный двигаться вверх и вниз, совершать вращательные движения [7]

вокруг вертикальной оси, проходящей через центр тяжести, горизонтальной плоскости, а также совершать поступательные движения [7] в горизонтальных плоскостях. Такие движения у квадрокоптера осуществляются благодаря четырем винтам (рис. 1).

При этом каждый из винтов имеет свой привод (электродвигатель), придающий ему вращение вокруг вертикальной оси. Два винта вращаются по часовой стрелке и два винта против (рис. 2).

При этом винты квадрокоптера в зависимости от направления вращения имеют следующий вид (рис. 3).

Содержательно управление квадрокоптером осуществляется изменением угловых скоростей вращения винтов в зависимости от требуемого движения. А именно, для подъема и спуска все винты вращаются с одинаковой скоростью. Для движения в сторону требуется ускорить винты с одной стороны и замедлить с другой. Для поворота необходимо ускорить винты, вращающиеся по часовой стрелке, и замедлить вращающиеся против.



Рис. 1. Квадрокоптер  
Fig. 1. Quadrocopter

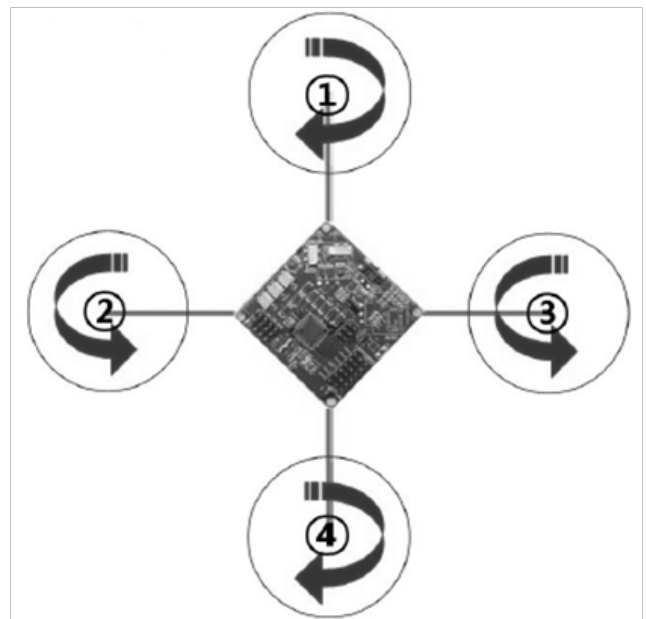


Рис. 2. Схема вращения винтов квадрокоптера  
Fig. 2. The scheme of rotation of the quadrocopter propellers



Рис. 3. Винты квадрокоптера  
Fig. 3. The rotors of the quadrocopter  
www.avu.usaca.ru

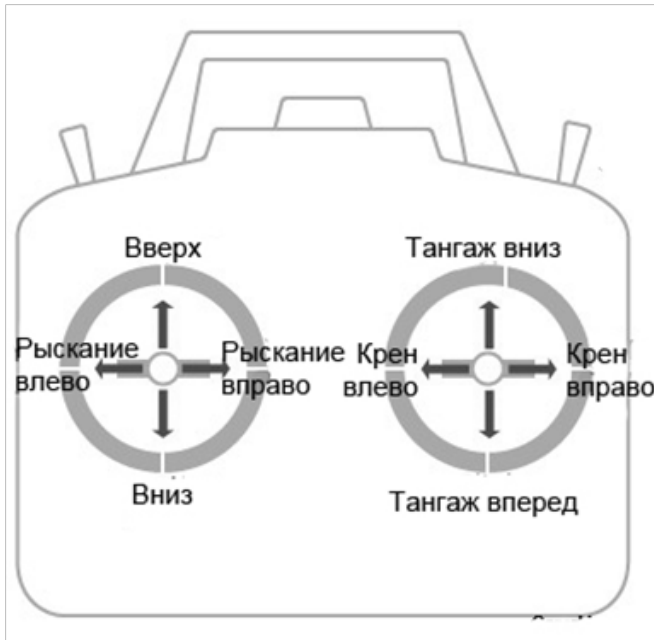


Рис. 4. Пульт дистанционного управления

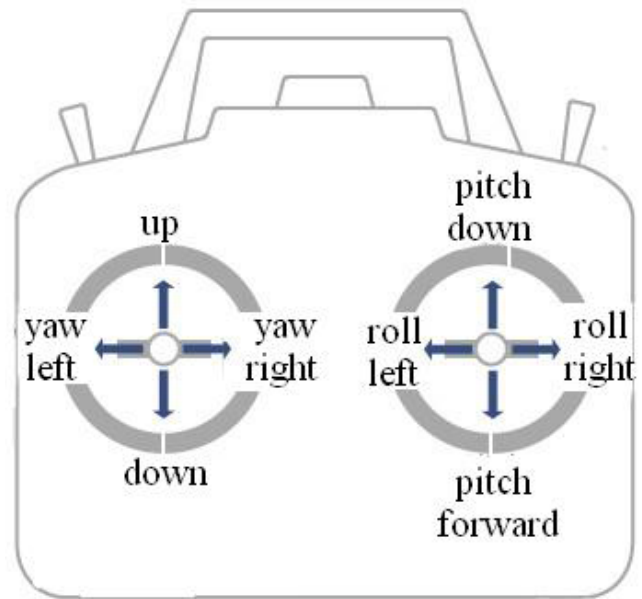


Fig. 4. Remote control

В простейшем случае управление осуществляется с помощью пульта [10] (рис. 4). Также управление может осуществляться с мобильного устройства через специальное приложение, путем подключения квадрокоптера к устройству через wi-fi.

Перейдем к построению оригинальной управляемой математической модели для рассматриваемого типа квадрокоптера. «Расчетная схема» для такого квадрокоптера представлена на рис. 5.

Здесь  $\omega_i, i = 1, \dots, 4$  – угловые скорости вращения винтов в указанных направлениях;  $f_i, i = 1, \dots, 4$  – силы, создаваемые винтами и соответствующие этим угловым скоростям. Как было указано, управление квадрокоптером как раз и осуществляется с помощью изменения указанных угловых скоростей и создаваемых ими сил. Изменение данных сил подвластно нам, т. е. находится под нашим контролем. Таким образом, эти силы будут играть роль управляющих воздействий, или просто управлений, в нашей математической модели. Обозначим эти силы буквами  $u_i, i = 1, \dots, 4$ . Естественно, что такие силы, хотя и могут меняться по направлению вверх и вниз, являются ограниченными по величине. Эта величина в данном случае определяется ресурсом включенных в схему электродвигателей. Таким образом, имеем:

$$-R \leq u_i \leq R, i = 1, \dots, 4, \quad (1)$$

где  $R \geq 0$  – некоторая константа, определяющая указанный ресурс управления.

С учетом введенных обозначений (рис. 5) и формулы (1), а также дифференциальных уравнений Ньютона – Эйлера [8], опуская промежуточные выкладки, приходим к следующей форме математической модели для рассматриваемой механической системы, моделирующей движение квадрокоптера (рис. 1).

$$\dot{p} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = F(t, p, u), \quad t_{\text{нач}} \leq t \leq t_{\text{кон}}, \quad (2)$$

где  $t_{\text{нач}}$  – момент начала движения (процесса управления);  $t_{\text{кон}}$  – момент окончания процесса управления при условиях (1). Здесь функционал в правой части уравнения (2) строится по известным конструкциям из теоретической механики и математической теории управления [9]. В выражении (2) точка над буквой обозначает первую производную, т. е.  $\dot{p} = \frac{dp}{dt}$  [7]. Применяя известный метод линеаризации нелинейных дифференциальных уравнений и рассматривая малые движения системы, т. е. на малом отрезке времени, решать задачу управления о переводе системы (2) из заданного начального состояния в заданное конечное состояние можно с помощью программного управления  $\{u[t], t_{\text{нач}} \leq t \leq t_{\text{кон}}\}$  [5] для линейной системы вида:

$$\dot{p} = A(t)p + B(t)u, \quad t_{\text{нач}} \leq t \leq t_{\text{кон}}, \\ p[t_{\text{нач}}] = p_*, \quad p[t_{\text{кон}}] = p^*. \quad (3)$$

Здесь  $\dot{p}$  – шестимерный вектор из (2);  $u$  – управление (1). Параметры системы (3) получаются линеаризацией соответствующих частей функционала (2) – отбрасыванием в функционале (2) членов большего порядка малости, чем один. Эти преобразования, как и в случае построения функционала (2), не представляют трудности и ввиду их большого объема здесь опущены. Основная цель работы – указать конструкцию оптимального управления, переводящего систему (1) из

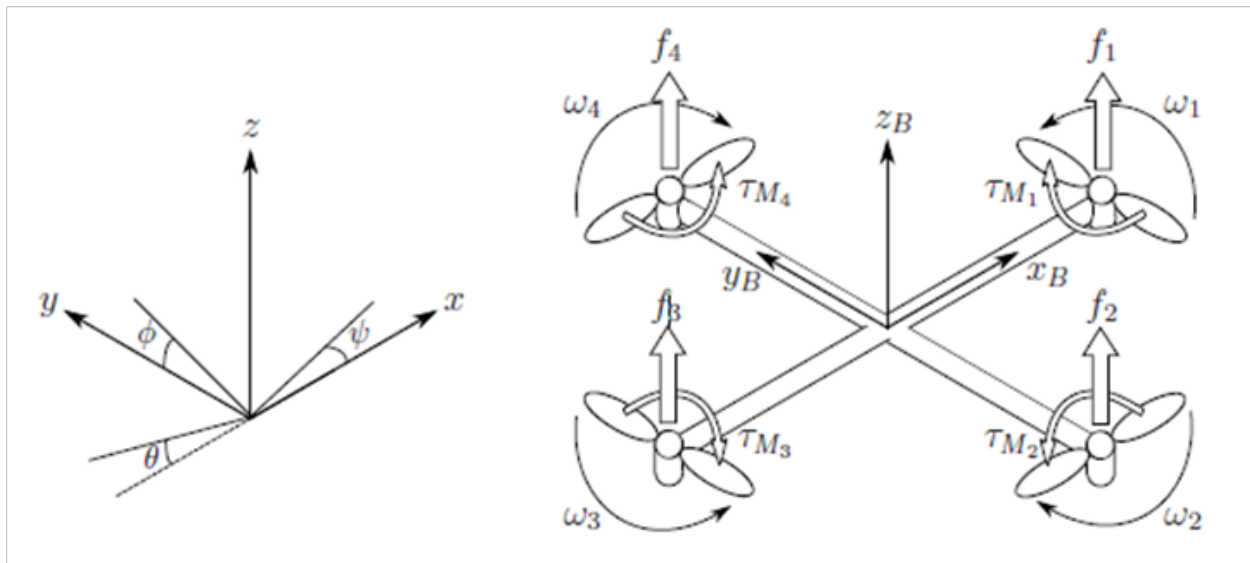


Рис. 5. «Расчетная схема» для математической модели  
Fig. 5. "Design scheme" for the mathematical model

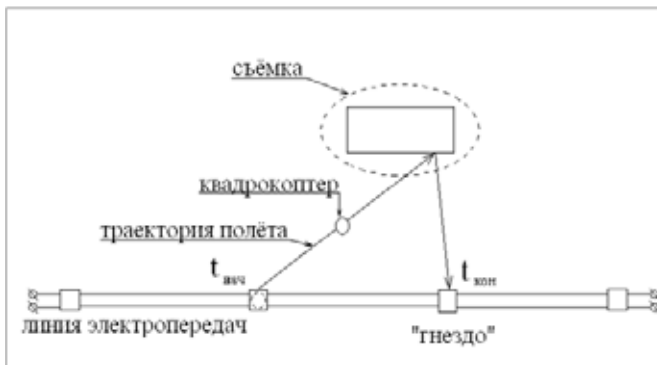


Рис. 6. Схема движения квадрокоптера

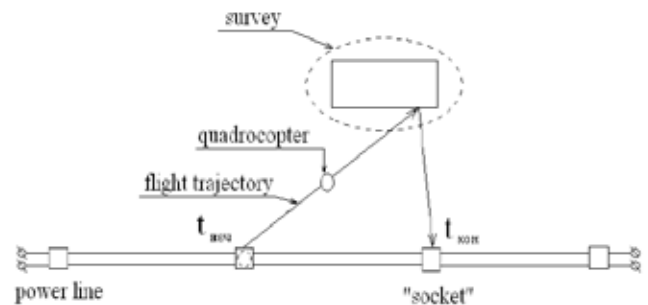


Fig. 6. The scheme of movement of a quadcopter

заданного начального в заданное конечное состояние за маленький отрезок времени. Решение этой задачи приведено в работе авторов [5]. А именно искомое программное управление  $\{u^0(\tau), t_{нач} \leq \tau \leq t_{кон}\}$  выражается следующей формулой:

$$u^0(\tau) = B'P'(t_{кон}, \tau)(F^*)^{-1}(p_{кон}^* - P(t_{кон}, t_{нач})x_{нач}), \quad (4)$$

$$\text{где } F^* = \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} X(t_{кон}, \tau)B'X'(t_{кон}, \tau)d\tau. \quad (5)$$

Здесь верхний индекс обозначает транспонирование, верхний индекс «-1» обозначает обратную матрицу, а  $X(t, \tau)$  – фундаментальная матрица [9]. Для широкого круга задач программного управления [5] доказано, что так построенное управление является оптимальным по критерию качества:

$$\gamma = \int_{t_{нач}}^{t_{кон}} u^2[\tau]d\tau, \quad (6)$$

характеризующего затраты энергии на выработку управляющего воздействия. Другими словами, управление (4), (5) дает наименьшее значение критерия качества процесса управления (6) по сравнению со всеми другими возможными управлениями. Известно, что критерии качества вида (6) характеризуют затраты энергии для так называемых двигателей малой тяги в авиации и ракетной технике. Следовательно, и их применение для летательных аппаратов типа дронов-квадрокоптеров, рассмотренных в данной работе, представляется целесообразным и обоснованным.

В качестве иллюстрирующего примера можно рассмотреть движение квадрокоптера по заданной траектории [6]. При этом схема движения квадрокоптера имеет следующий вид (рис. 6).

Авторы благодарят генерального директора научно-производственного центра VIDICOR, доктора физико-математических наук В. В. Прохорова за ценные советы.



### Литература

1. Белоконь С. А. и др. Управление параметрами полета квадрокоптера при движении по заданной траектории // Автометрия. 2012. № 5. С. 32–41.
2. Будаи Б. Т., Красовский Н. А. К вопросу о повышении точности измерения координат // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2008. Т. 6. № 69. С. 85–91.
3. Будаи Б. Т., Красовский Н. А. Оценка параметров «смаза» изображения в замкнутых контурах управления оптико-электронных систем // Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского государственного политехнического университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2009. Т. 3. № 80. С. 166–174.
4. Ким А. В., Красовский А. Н. Математическое и компьютерное моделирование систем с последействием. Екатеринбург : УГТУ-УПИ, 2010. 134 с.
5. Красовский А. Н., Никаноров С. В., Парамонов А. Г. Основы программного управления линейными динамическими системами. Екатеринбург : УрГАУ, 2014. 47 с.
6. Красовский А. Н., Сулова О. А. Облет дронами-квадрокоптерами сельскохозяйственных угодий // Аграрный вестник Урала. 2016. № 1. С. 29–32.
7. Красовский А. Н., Чой Е. С. Теоретическая механика : курс лекций. Екатеринбург : УрГАУ, 2014. 240 с.
8. О'Рейли О. М. Курс динамики для инженеров: единый подход к механике Ньютона – Эйлера и механике Лагранжа. М. ; Ижевск : Ижевский институт компьютерных исследований, 2011. 504 с.
9. Красовский А. Н., Красовский Н. Н. Управление при дефиците информации. Бостон, США : Биркхойзер, 1995. 320 с.
10. Как управлять квадрокоптером? URL : <http://quadrocoptery.ru/how-to-fly-a-quadcopter>.

### References

1. Belokon S. A. et al. Control of the parameters of flight quadcopters when moving along a predetermined path // Avtometriya. 2012. № 5. P. 32–41.
2. Budai B. T., Krasovskii N. A. On the issue of improving the accuracy of measurement of coordinates // Scientific and technical sheets of St. Petersburg State Polytechnic University. Computer science. Telecommunications. Management. 2008. Vol. 6. № 69. P. 85–91.
3. Budai B. T., Krasovskii N. A. Estimation of the image «smear» parameter in the closed circuit control of opto-electronic systems // Scientific and technical sheets of St. Petersburg State Polytechnic University. Computer science. Telecommunications. Management. 2009. Vol. 3. № 80. P. 166-174.
4. Kim A. V., Krasovskii A. N. The mathematical and computer modeling for the system with aftereffect. Ekaterinburg : USTU-UPI, 2010. 134 p.
5. Krasovskii A. N., Nikanorov S. V., Paramonov A. G. The basics of program control of linear dynamic systems. Ekaterinburg : Ural State Agrarian University, 2014. 47 p.
6. Krasovskii A. N., Suslova O. A. Fly by drones-quadcopters agricultural lands // Agrarian Bulletin of the Urals. 2016. № 1. P. 29–32.
7. Krasovskii A. N., Choi Y. S. Theoretical mechanics : course of lectures. Ekaterinburg : Ural State Agrarian University, 2014. 240 p.
8. O'Reilly O. M. A unified treatment of Newton – Euler and Lagrangian mechanics. M. ; Izhevsk : Izhevsk Institute of Computer Science. 2011. 504 p.
9. Krasovakii A. N., Krasovskii N. N. Control under lack of information. Boston, USA : Birkhauser, 1995. 320 p.
10. How to fly a quadcopter? URL: <http://quadrocoptery.ru/how-to-fly-a-quadcopter>.